
悲嘆之種的經濟學：以個體模擬分析《魔法少女小圓》 的魔法少女系統

星之宮愛麗絲 (Arisu Hoshinomiya)

arisu@yunya.pet

獨立研究者

2026 年 7 月 28 日

摘要

《魔法少女小圓》中的魔法少女、魔女與丘比構成一個子系統。本研究將其簡化為一個封閉的資源循環，並以個體模擬 (agent-based simulation) 觀察它在系統層面的表現，也就是把每一名魔法少女與每一隻魔女都當成獨立個體逐一模擬，再看整體會浮現什麼樣的規律。簡化後的模型保留五項要素：靈魂寶石會累積濁化、濁化須以魔女留下的悲嘆之種淨化、寶石濁化至飽和的少女將化為魔女、丘比回收此一轉變所釋放的能量，以及新的少女透過締約進入系統。模型建構於城區網格之上，並納入少女彼此爭奪悲嘆之種的鷹鴿賽局 (hawk-dove game)。研究發現有四：一、一名少女一生累積的濁化主要來自與其他少女的爭奪，而非與魔女的戰鬥；魔女稀少時兩者比例約為 5.9 比 1，魔女充裕時則降至 1 以下。二、少女折損的速率取決於丘比締約的速率，與悲嘆之種的供給幾乎無關；魔女增加時改變的是折損的方式而非折損的人數，其中以魔女化收場的比例由 88% 降至 31%。三、丘比累積回收的能量受限於新候選人出現的速度，因此使回收量最大化的招募率，會隨著評估期間拉長而下降；早期的高回收來自一次性的存量，這是一個龐氏 (Ponzi) 結構。四、爭奪悲嘆之種的侵略性呈現公地悲劇 (tragedy of the commons) 的結構：族群整體在侵略性約 0.15 時存活最久，但在資源稀缺的情況下，較強硬的策略仍能侵入較溫和的族群。以上結果均為模型在既定假設下的性質。本文標明各項結果成立的參數範圍，並以一條精確的守恆恆等式檢驗程式實作。

關鍵詞 個體模擬 · 共有資源 · 族群動態 · 演化賽局理論 · 虛構世界建模

1 前言

本研究處理《魔法少女小圓》中的一個子系統，其成員為魔法少女、魔女與丘比。我們把它形式化成一個資源循環，並以下列五項作為模型的假設：

1. 魔法少女的靈魂寄託於靈魂寶石之中。
2. 靈魂寶石會隨時間與魔力使用而累積濁化。
3. 濁化可透過悲嘆之種淨化，而悲嘆之種由被擊敗的魔女留下。
4. 靈魂寶石濁化至飽和時，持有者化為魔女，丘比回收此一轉變所釋放的能量。
5. 新的少女透過與丘比締約進入系統。

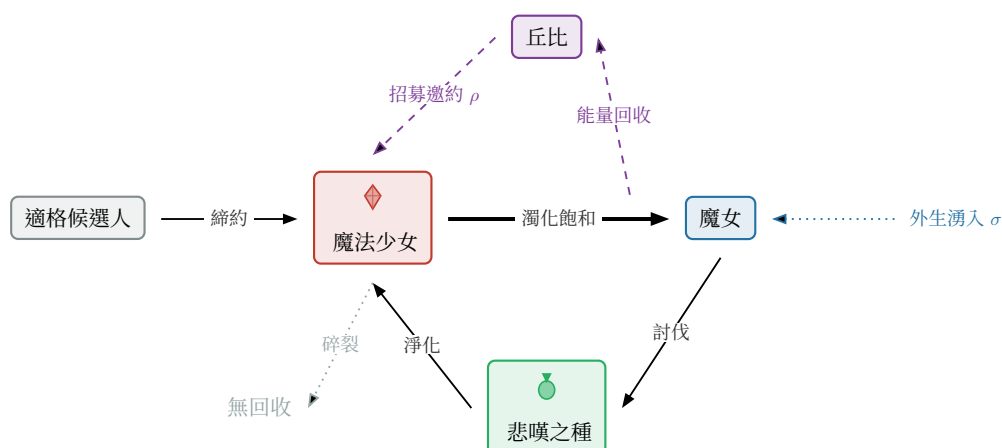


圖 1 資源循環示意。實線為主循環，紫色虛線為丘比的兩項作用。點線是系統的兩個邊界流：一是魔女從模型外部湧入，二是靈魂寶石碎裂造成的折損；碎裂不會產生魔女，因此沒有能量可回收。圖中的寶石與種子圖示是為本圖繪製的原創幾何造型。

上述五項假設共同定義了本研究的模型。各項假設皆僅影響每日循環中的單一階段，因此若欲採用不同的形式化方式，只需更動 小節 3 中對應的規則。

圖 1 以示意圖呈現這個循環。以此方式寫下之後，模型便具備共有資源 (common-pool resource) 系統的結構。悲嘆之種是可再生資源，其供給一部分來自模型外部進入的魔女，一部分則來自魔法少女本身，因為魔女化的少女會成為其他人的種子來源。丘比則從族群的汰換中取得能量。這類系統已有成熟的研究傳統：漁業生物經濟學 (bioeconomics) [1], [2], [3] 處理可再生存量的採收，共有資源研究 [4], [5] 處理開放取用的後果，演化賽局理論 (evolutionary game theory) [6], [7] 則處理對可分資源的爭奪。

接著本研究探討這個循環在系統層面的表現：一段生涯可以持續多久？一座城市同時能維持多少名少女？種子供給如何分配？這些又如何隨魔女出現的頻率與締約的頻率而變化？我們感興趣的行為，多半難以直接從規則本身看出來，其中最關鍵的，是種子經濟與圍繞種子的爭奪兩者之間的交互作用。

模型中並未寫入任何關於領域、合作或掠奪的規則，少女之間的差異也僅有戰鬥力、位置與一個侵略性參數。即便如此，仍有數種模式從模擬中湧現 (emergence)，本文大部分篇幅即用於刻畫這些模式。

1.1 研究貢獻

- 一個帶有空間結構的個體模型 (小節 3)，具備完整的濁化收支、由模型內部決定的締約速率，以及對悲嘆之種的鷹鴿賽局式爭奪。
- 一條關於濁化的精確守恆恆等式 (小節 3.4)，可將一段生涯分解為來源與去向，並作為驗證工具使用。
- 四項研究發現 (小節 4)：爭奪主導濁化收支；折損速率取決於締約速率，種子供給只改變折損的方式；累積回收量受候選人流入速度所限；侵略性呈現具有內部最適解的公地悲劇。
- 對上述結果整體意義的討論，以及將模型用作敘事生成之規則核心的可能性 (小節 5)。

2 相關研究

個體模擬。由局部規則推導出系統層面的規律，是個體模擬的標準做法，此一方法在 Sugarscape 的傳統中確立 [8]。這類研究先在個體層面定義行為，再定義個體之間的互動，最後觀察宏觀樣貌（macro pattern）如何從微觀活動中湧現，本研究亦沿用此一取徑。近年也有研究以語言模型驅動的角色（LLM agent）產生可信的社會行為 [9]，小節 5 將回到這一點。

生物經濟學。Gordon-Schaefer 模型將 S 型的存量成長曲線（logistic growth）與捕撈努力量結合，並指出三個參考點：最大可持續產量（maximum sustainable yield）、最大經濟產量（maximum economic yield），以及開放取用均衡（open-access equilibrium），此時經濟租已被完全耗散 [1], [2], [3]。此模型最接近本研究所設定的締約問題，但有一項結構差異需要先行說明。在漁業中，被採收的存量與可再生資源屬於同一族群；在本模型中兩者並不相同：悲嘆之種是可再生資源，而魔法少女同時是被採收的存量與採收的努力量。

爭奪。鷹鴿賽局 [6], [7] 指出，只要升高衝突的代價超過所爭資源的價值，便會出現混合均衡。本研究採用其空間版本，其中爭奪價值會隨人均可用種子容量下降而升高，因此衝突強度由模型內部決定。

規則系統的形式描述。線性邏輯（linear logic）[10] 適於描述資源轉換規則，因為狀態變化不需要另外宣告「哪些東西沒有改變」（框架公理 [11]），Ceptre [12] 即以此為基礎建立規則描述語言。回答集程式設計（answer set programming）則用來描述生成內容的設計空間（design space），作法是把空間的條件直接寫成邏輯程式 [13], [14]，以及雙向地分析遊戲系統 [15]。這類工具擅長處理硬約束與可達性，而本研究的問題屬於量化與族群層面，因此採用模擬。

3 模型

3.1 狀態

時間為離散，每一步代表一日。空間是 $G \times G$ 的城區網格，四邊相接，走出右緣會回到左緣（數學上即一個環面），其中 $G = 6$ 。狀態包含一組魔法少女、一組魔女、一個代表候選人池的數值 P ，以及丘比的累積回收量 E 。

魔法少女 i 具有位置、濁化程度 $c_i \in [0, 1]$ 、戰鬥力 w_i 、所持悲嘆之種及其殘餘容量、侵略性參數 $a_i \in [0, 1]$ 、年齡，以及若干用於記錄的累計量。魔女具有位置與力量 w 。

3.2 每日循環

- 一、**候選人與魔女出現** 候選人池以 Λ 成長，上限為 $P_{\max}$ 。魔女自模型外部出現，速率為 σ ，依 Poisson(σ) 抽樣。每隻現存魔女以機率 δ 轉入休眠。
- 二、**自然濁化與移動** 每名少女年齡增加一日，並累積自然濁化 α 。她以機率 h 朝最近的魔女移動一格，否則隨機移動。
- 三、**戰鬥** 在每個有魔女的城區，由在場戰鬥力最高的少女與之交戰，並累積 βw 濁化。她以機率 $w_i/(w_i + w)$ 獲勝，此時魔女被移除，她取得一顆容量為 κ 的悲嘆之種。若戰敗，則額外累積 $0.8\beta w$ ，且靈魂寶石以機率 p_s 碎裂。寶石碎裂會使少女折損，但不產生魔女，因此不帶來任何回收。
- 四、**爭奪** 在每個有兩名以上少女的城區，隨機一對進行鷹鴿賽局。少女 i 以機率 a_i 採取強硬策略。若雙方皆強硬，敗方付出 C 濁化、勝方付出 $0.35C$ ，敗方所持種子以機率 0.5 易手，

敗方寶石則以機率 $1.5p_s$ 碎裂。若僅一方強硬，她以機率 $0.35V$ 自不強硬的持有者手中取走一顆種子，其中爭奪價值 $V = (1 + \Sigma_{\text{cap}}/M)^{-1}$ 會隨人均可用種子容量下降而升高。若雙方皆不強硬，則不發生任何事。

五、淨化 當 c_i 超過觸發值 c_{trig} 且手中有種子時，濁化會下降至目標值 c_{targ} ，代價是消耗種子的殘餘容量。

六、魔女化 濁化 $c_i \geq 1$ 的少女化為力量 λw_i 的魔女，丘比的回收量增加一單位。

七、締約 丘比每日提出 $\text{Poisson}(\rho)$ 次招募邀約，每次以機率 π 被接受，並消耗一單位候選人池。新加入的少女，其侵略性或取自一個固定值，或以存活時間為權重模仿近期折損者。

3.3 參數

表 1 列出十七個參數。本研究將其視為一個待探索的設計空間，而非待估計的量，此一用法與 [13] 一致；結果則以最常變動的兩個參數呈現：魔女出現率 σ 與招募率 ρ 。日數、人數等絕對數值只在模型內部有意義，不宜直接對應到作品中的時間或人數。

符號	數值	意義	English
α	0.0022	每日自然濁化	passive drain
β	0.030	每單位交戰魔女力量所致濁化	combat corruption coefficient
κ	1.5	悲嘆之種容量	grief seed capacity
$c_{\text{trig}}, c_{\text{targ}}$	0.55, 0.25	淨化觸發值與目標值	cleansing trigger / target
p_s	0.012	每次戰敗的寶石碎裂機率	shatter probability
λ	1.6	魔女化時的力量倍率	power multiplier
G	6	網格邊長（城區數）	grid side
h	0.75	朝魔女移動的機率	patrol probability
σ	見內文	每日魔女出現數	witch arrival rate
δ	0.004	每日魔女休眠率	dormancy rate
Λ, P_{max}	0.25, 90	候選人流入與池上限	candidate inflow / pool cap
ρ	見內文	每日招募邀約次數	offer rate
π	0.55	邀約被接受的機率	acceptance probability
C	0.11	升高衝突的濁化代價	escalation cost
a	0.25 或逐一變動	侵略性	aggression

表 1 模型參數。

3.4 濁化收支

濁化在個體內是守恆的：它被產生、被淨化，或被帶到生涯結束為止，除此之外沒有其他去處。因此每一段生涯都滿足一條精確的恆等式。考慮一名少女：她在 L 日後結束生涯，一生累積淨化 P 單位，在與魔女的戰鬥中承受 C_{cb} 濁化，在爭奪中承受 C_{cf} 濁化，結束時寶石負載為 c_{end} 。她滿足：

$$\alpha L + C_{\text{cb}} + C_{\text{cf}} = c_{\text{end}} + P. \quad (1)$$

移項後可知，生涯長度即為一份濁化預算除以自然濁化率：

$$L = (c_{\text{end}} + P - C_{\text{cb}} - C_{\text{cf}})/\alpha. \quad (2)$$

在進行模擬之前，有兩點可先行看出。若一名少女從不戰鬥、從不爭奪，也從不淨化，她的生涯長度就是 $1/\alpha = 455$ 日。這個數字可作為模型的自然壽命單位。此外，淨化與衝突在式 2 中的符號相反，因此決定壽命的是兩者之間的平衡，而非其中任何一方。

在穩態 (steady state) 下，Little 定律 [16] 將同時存在的人數、締約率 $R = \rho\pi$ 與平均生涯長度連結起來： $M = R\bar{L}$ ；而丘比的回收速率為

$$\dot{E} = Rf_w, \quad (3)$$

其中 f_w 為以魔女化（而非碎裂）收場的比例。式 3 是後續分析的關鍵：它顯示種子經濟只能透過 f_w 這一個管道影響丘比的回收。

4 結果

所有模擬執行 8000 日。穩態量取最後 2000 日的平均，生涯統計則彙整各次重複試驗中已完成的生涯。除另有說明外 $\rho = 0.03$ ，即每日 $R = 0.0165$ 份契約。

4.1 基準情境

圖 2 顯示 $\sigma = 0.02$ 的一次模擬。系統穩定在 $M = 16.4$ 名少女與 $W = 0.037$ 隻現存魔女。魔女幾乎一出現即被獵殺，因此場上看得到的魔女，數量遠少於獵殺它們的少女。生涯長度中位數為 411 日、平均為 673 日；84.9% 的折損屬於魔女化；丘比每日回收 0.0126 單位。平均濁化維持在 0.42 附近且沒有漂移，顯示模擬已達穩態。

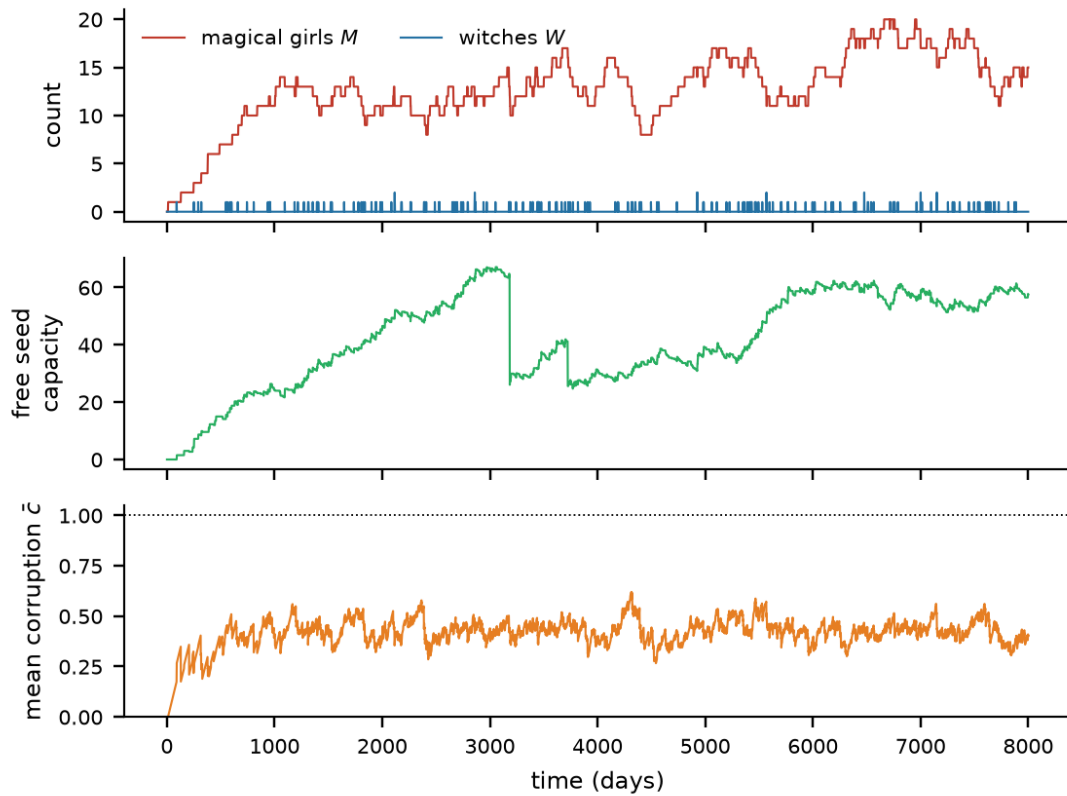


圖 2 $\sigma = 0.02$ 、 $\rho = 0.03$ 的基準模擬。上：魔法少女與現存魔女數。中：族群持有的未使用悲嘆之種總容量。下：平均寶石濁化，虛線為魔女化門檻。

4.2 結果一：爭奪主導濁化收支

將式 1 沿魔女出現率分解（圖 3、表 2），可得第一項發現。魔女稀少時，少女在與其他少女的爭奪中承受的濁化，是與魔女戰鬥所承受者的 5.3 至 5.9 倍。終結一段生涯的濁化，大部分來自自然濁化與其他魔法少女。

此一比例強烈受魔女密度影響。它隨 σ 上升而單調下降，至 $\sigma = 0.5$ 時降為 0.8：魔女多則種子多，爭奪價值 V 隨之下降，升高衝突便不再划算。因此在本模型中，爭奪是稀缺的結果。種子難以取得之處會出現領域排他，種子充裕之處則不明顯。

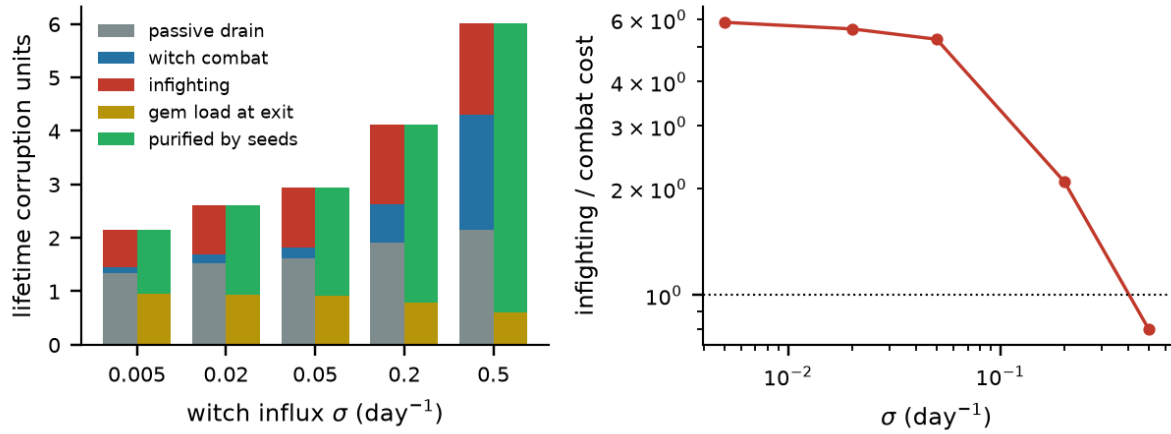


圖 3 濁化收支。左：一生的濁化來源（左柱：自然濁化、與魔女戰鬥、少女之間的爭奪）與去向（右柱：生涯結束時的寶石負載、由種子淨化的部分）。右：爭奪成本對戰鬥成本的比值，虛線為兩者相等處。

σ	$\bar{L}$	自然	戰鬥	爭奪	淨化	M	f_w
0.005	609	1.34	0.118	0.694	1.19	11.5	0.878
0.02	689	1.52	0.165	0.929	1.67	13.1	0.844
0.05	733	1.61	0.211	1.114	2.02	15.7	0.813
0.2	866	1.91	0.717	1.495	3.33	22.2	0.608
0.5	980	2.16	2.145	1.716	5.42	30.6	0.307

表 2 以濁化單位表示的一生收支、以日為單位的平均生涯長度、同時存在的人數，以及魔女化比例。每列四次重複試驗（replicate）， $n = 441$ 至 501 段生涯。

4.3 結果二：折損速率取決於締約，而非種子供給

在魔女出現率橫跨百倍的範圍內，少女折損的速率維持在每日 0.0138 至 0.0157 之間，一如式 3 所預期，隨締約速率而定（圖 4 中圖，虛線為 Rf_w ）。使種子經濟變得充裕，並不會減少結束生涯的人數，改變的是她們結束的方式：當 σ 由 0.005 升至 0.5，魔女化的比例由 87.8% 降至 30.7%，因為戰鬥致死發生在飽和之前。丘比的回收亦隨之由每日 0.0126 降至 0.0043。

這是種子經濟影響丘比的唯一途徑，其方向值得注意。魔女眾多的環境對丘比並不有利，原因不在於少女得以存活，而在於她們折損的方式變了：更高比例的少女死於碎裂或爭奪，這兩種都無法回收能量。與此同時，同時存在的人數幾乎增為三倍，由 11.5 升至 30.6，平均生涯長度上升 61%，由 609 日增至 980 日，但中位數僅上升 15%，由 415 日增至 478 日。資源充裕主要放大的是族群規模與生涯分布的上尾（圖 4 右圖，第 90 百分位由 1128 日移至 2612 日）。

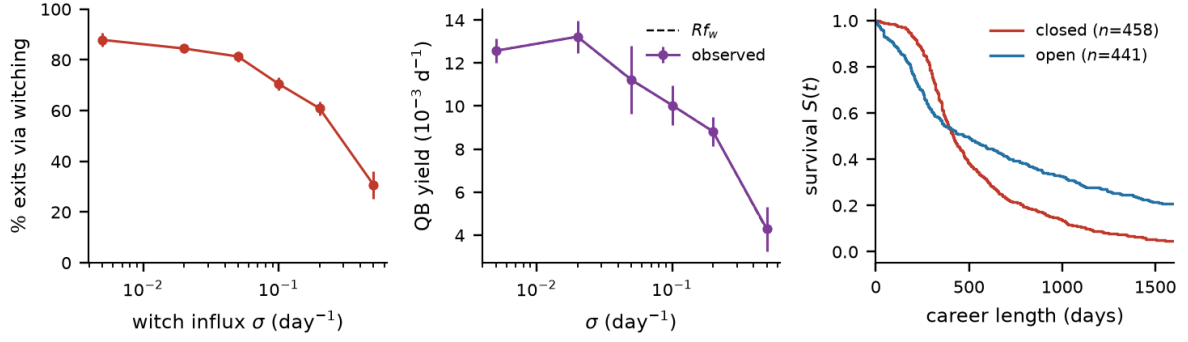


圖 4 左：魔女化比例對魔女出現率。中：丘比的回收量，並疊上式 3 的預測值 R_{fw} 。右：低出現率（圖中 closed， $\sigma = 0.005$ ）與高出現率（圖中 open， $\sigma = 0.5$ ）兩種情況下的生涯存活曲線（survival curve）。

完整的 (ρ, σ) 曲面（圖 5）顯示，回收量在整個範圍內皆隨招募率上升、隨魔女出現率下降。在 $\sigma = 0.5$ 、 $\rho = 0.006$ 的角落，魔女化比例降至零：所有少女皆折損於戰鬥或爭奪，完全沒有能量被回收。

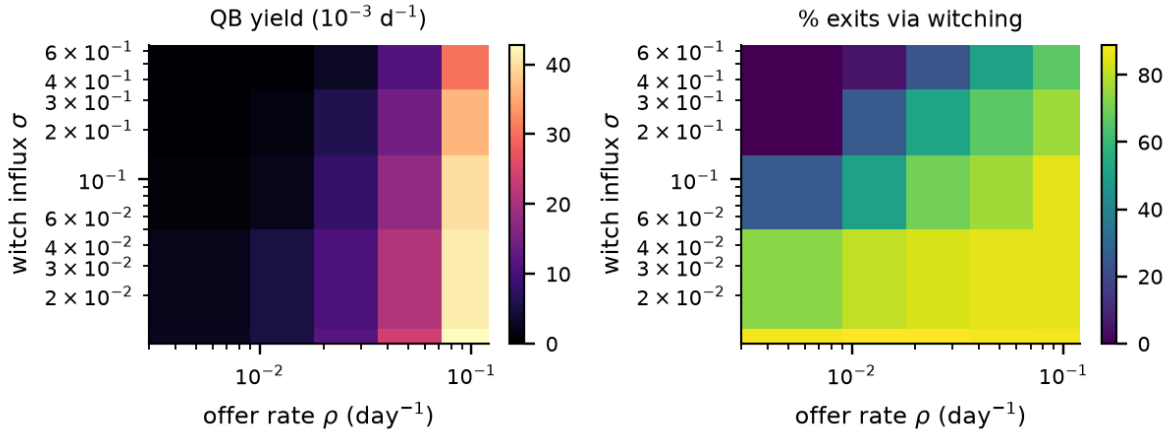


圖 5 丘比的回收量（左）與魔女化比例（右）在招募率與魔女出現率上的分布。每格兩次重複試驗。

4.4 結果三：累積回收量受候選人流入所限

圖 6 限制候選人池，設 $\Lambda = 0.03$ 與 $P_{\max} = 60$ ，並逐一變動招募率。累積回收量出現飽和：超過 $\rho \approx 0.066$ 之後，8000 日的總量落在 235 至 244 單位之間，與丘比締約的積極程度無關。此一水準由流量項 $\Lambda f_w T \approx 204$ 與一次性存量項 $P_{\max} f_w \approx 51$ 決定。兩者之和為 255，比實測總量高出約 17 單位，而這正是模擬結束時仍在場的人數：她們已消耗候選人，但尚未完成轉變。

此一分解說明了飽和的成因。高招募率能迅速將現有的候選人存量轉換為能量，但該存量僅能消耗一次；耗盡之後，回收速率便受限於 Λ ，亦即新候選人變得適格的速度。因此使累積回收量最大化的招募率，會隨評估期間拉長而下降： $T = 500$ 與 $T = 2000$ 日時 $\rho^* = 0.140$ ， $T = 8000$ 日時則降至 0.110。高招募率的全部優勢，皆取自一個不會補充的存量，這正是龐氏結構：早期的高回收來自一次性的存量，而非可持續的流量，唯有不斷有新的候選人加入才能維持。

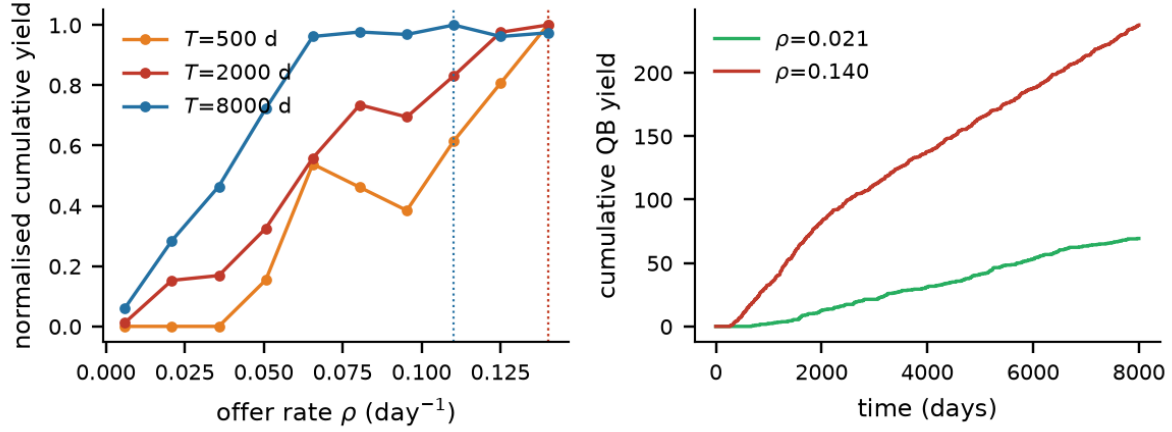


圖 6 左：三種評估期間下，正規化累積回收量對招募率，並標出各自的極大值位置。右：候選入池受限時，低招募率與高招募率的回收軌跡。

4.5 結果四：侵略性呈現公地悲劇的結構

將侵略性參數固定，使全體採取相同數值（圖 7 左圖），可見集體最適解落在偏低但非零的侵略性上。生涯長度中位數在 $a = 0.15$ 達到最高，種子稀缺時為 524 日、充裕時為 549 日，而在 $a = 1$ 時降至 140 日與 132.5 日。同時存在的人數在同一範圍內下降 3.8 至 7.8 倍。全面的侵略性對所有人都是昂貴的。

有兩點值得進一步說明。在 $a = 0$ 時，兩種情況下的生涯中位數皆為 455 日，恰好等於 $1/\alpha$ ，亦即完全沒有淨化時的壽命。由於每個城區僅有戰鬥力最高的少女能與魔女交戰，種子的取得會集中於最強者，因此即使魔女充裕，中位數的少女也無法取得任何種子。這同時說明了為何少量的侵略性反而會提高中位數：奪取種子的行為，將種子自獨佔獵場者手中重新分散出去。

入侵分析 (invasion analysis, 圖 7 右圖) 可將個體利益與集體利益區分開來，其作法是在既有族群中放入少量突變者，她們的侵略性與既有族群不同，再看她們是否活得比較久。在資源稀缺、既有族群 (resident) 的侵略性為 $a = 0.25$ 的情況下， $a = 0.5$ 的突變者 (mutant) 達到既有族群生涯中位數的 1.035 倍， $a = 0$ 僅達 0.94 倍， $a = 1$ 更僅有 0.66 倍。換言之，存在一個內部最適反應，它同時高於既有族群的水準與集體最適解，侵略性因而會逐漸向上飄移。種子充裕時，各種突變者皆不如既有族群，分別為 0.88、0.70 與 0.56 倍，此一壓力便隨之消失。以社會學習 (social learning) 傳遞的侵略性，其均衡值亦與此一致：稀缺時 $\bar{a} = 0.258$ ，充裕時為 0.238。

因此，本模型中的侵略性在資源稀缺時對個體是有利的，對集體卻是昂貴的，此即公地悲劇的結構 [4]。而它的出現，並不需要任何一條提及合作、背叛或領域的規則。

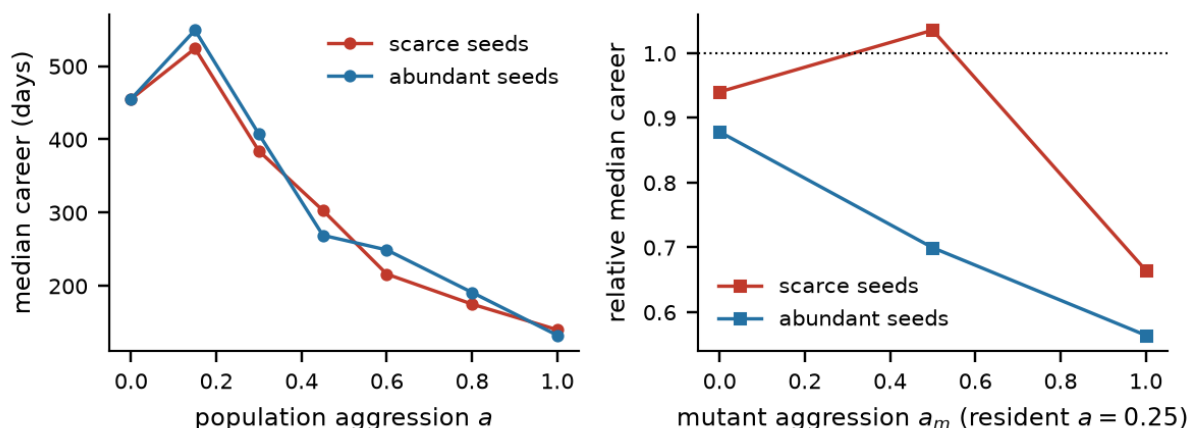


圖 7 左：全體採取相同侵略性時，生涯長度中位數隨侵略性參數的變化。右：突變者對 $a = 0.25$ 既有族群的入侵適應度（invasion fitness），以生涯長度中位數之比表示，虛線為中性水準。

4.6 與建模依據的一致性

上述行為中有三項與本研究建模時所依據的理解一致：一座城市同時僅維持少數幾名少女、獵場會受到防守，而某一區域中最強的少女傾向獨佔該區。這三項都未被寫入規則。在模型中，它們是資源結構與交戰規則共同作用的結果，可作為模型行為合理性的檢查，適用範圍以本文所使用的參數區間為限。

生涯長度刻意不列入這項檢查。自然濁化率 α 是為了讓 $1/\alpha$ 落在一年多而選定的，生涯中位數自然也就落在該值附近，因此兩者相符屬於校準，而非結果。

5 討論

5.1 結果的整體意義

綜合四項發現可知，在本模型中，種子經濟扮演的是緩衝而非解方。種子能延長個別少女的生涯、擴大族群規模，式 2 也精確說明了原因：它們加入了濁化預算。種子做不到的是改變少女折損的速率，而式 3 顯示這個速率由締約率決定。在穩態下，每一份契約最終都會產生一次折損，而其中固定比例會帶來回收。

與漁業模型的對照，最值得注意的是地方正是類比失效之處。在開放取用的漁場中，捕撈努力量會持續上升，直到經濟租耗盡、存量被過度利用為止 [1]。而在本模型中，努力量與存量屬於同一族群，因此提高努力量不只消耗資源，也同時消耗採收者本身。其結果是丘比的最適策略與直覺不同：它偏好魔女稀少的環境，以使少女走向飽和而非碎裂；也僅在短期評估下才偏好高招募率，因為長期而言真正的限制在於候選人池。

結果四則疊加了一層方向相反的效應。少女之間的爭奪消耗了原可用於延長生涯的預算，因而縮短生涯；但它同時將種子自獨佔者手中重新分散，反而提高了中位數。純合作與純侵略的族群皆非表現最佳者。在 $a = 0.15$ 附近，重分配已經開始發生，而衝突成本還不明顯，這正是該處成為內部最適解的原因。

5.2 將模型用作規則核心

模擬與語言模型的弱點方向相反。規則引擎能守住不變量，但產出的是數值而非描述；語言模型能產出流暢的描述 [9]，卻難以在長時間運行中可靠地遵守不變量。一種可行的分工是：不變量（invariant）交由模擬層把關，敘述文字交由生成層產出。模型裁決何者合法並計算後果，語言模型則提出結構化的意圖，再把產生的狀態變化寫成文字。

本研究的結果另指出模擬層在維持一致性之外的第二種用途：它能提供一組統計量供生成敘事遵守，例如生涯長度、爭奪演變成衝突的頻率、族群的稀疏程度，以及一名少女的預算主要消耗於何處。這些量是生成層難以自行可靠估計的。

5.3 延伸方向

本模型中的三方都可以改寫成會學習的個體，但預期的收穫並不相同。判斷依據有二：該方在模型中是否真的做決策，以及讓它學習的成本相對於它可能改變的結論。

讓丘比學習的成本最低，用處也最直接。它是單一決策者，目標明確（累積回收量），而且每個宏觀步只行動一次，因此不必更動模型的其他部分就能學習一個策略。結果三只比較了固定招募率，而候選人池的水位是可觀測的狀態，因此一個依狀態調整的策略或許能勝過任何固定值：池子見底時降低招募，回補後再提高。若成立，結果三所描述的龐氏結構就從一個現象變成一個可最適化的控制問題。本研究以表格式 Q-learning 在同一模型上做了測試（src/madoka_abm/rl_kyubey.py），決策以 100 日為一個宏觀步，動作為六個離散招募率，並以折現因子取代評估期間。在 $\gamma = 0.9$ 、0.99 與 0.999 三種設定下各訓練 2000 個回合，學到的策略皆未勝過最佳固定招募率，回收量分別少了 5%、14% 與 26%。此一設定有兩點限制了實驗能說明的範圍：累積回收量在 $\rho \approx 0.096$ 以上幾乎持平，狀態依賴策略可爭取的空間小於評估雜訊；學到的表格也明顯欠擬合。因此本研究將這個問題記為未決，而非已解。

讓魔法少女學習的成本高得多，但可能改變的結論也更多。目前侵略性是一個沒有記憶的數值，若改為讓每名少女依局部狀態（手上種子數、自身濁化、同格人數）自行學習強硬與否，本模型便成為一個標準的序列式社會困境：同時會有十餘至三十個策略彼此對抗，各自面對的環境都在變動。記憶使互惠與聲譽成為可能，結果四的結論很可能改變，這正是值得付出那份成本的理由。

在本模型中，魔女不做任何決策，只是資源的流動，沒有可最適化的目標；賦予它們策略只會增加參數，而沒有對應的問題可答。

此外有兩個方法面的延伸。其一是為參數掃描訓練代理模型，使圖 4 的解析度不再受模擬成本限制。其二是反過來做參數推論：給定一組想要的族群層面特徵，反推哪些參數組合能產生它。兩者的瓶頸都在產生訓練資料，而非模型本身。各項的計算量估計與進入點記於專案的 docs/ROADMAP.md。

6 研究限制

本模型涵蓋魔法少女、魔女與丘比所構成的子系統，前言所列的五項假設均為便於處理而採取的簡化形式。參數是為了涵蓋不同區間而選定的，並非估計值，因此絕對數值只在模型內部有意義。情緒狀態被併入自然濁化項，而未另行建模。戰鬥判定允許每隻魔女每日僅一次交戰，並判給在場戰鬥力最高者，此即結果四中獨佔效應的來源，換用其他交戰規則將會削弱該效應。侵略性只是一個數字，不帶記憶，因此互惠與聲譽被排除在外，重複互動下的均衡很可能不同。平均生涯長度只就已完成的生涯計算，因而受到低估，原因是模擬結束時仍在進行中的生涯沒有被計入（統計上稱為右設限，right-censoring），這也是本研究模擬中 M 高出 $R\bar{L}$ 約 14% 至 91% 的原因；

魔女愈多，模擬結束時尚未結束的生涯就愈多，兩者的差距也愈大。此外，由於移動與交戰都以日為單位發生， α 不只決定壽命的單位，也決定一段生涯裡包含多少次遭遇。把 α 連同所有每日速率一起縮放，生涯中位數仍維持在 $1/\alpha$ ，但無因次的結果會移動： α 相差四倍時，魔女化比例介於 0.78 至 0.88，爭奪對戰鬥的比值介於 8.3 至 4.3。本文報告的每一項關係，其方向在縮放後仍成立，水準值則不然，只屬於此一時間單位。最後，丘比是參數化而非最適化的；本研究嘗試學習一個依狀態調整的策略（見 小節 5），並未勝過最佳固定招募率，而圖 6 顯示其目標函數本就會強烈依賴評估期間。

7 結論

將悲嘆之種的循環寫成模型並加以模擬之後，可觀察到數項量化特徵。魔女稀少時，消耗一段生涯大部分濁化預算的是少女之間的爭奪，而非與魔女的戰鬥，且此一爭奪會隨魔女增加而平息。種子供給改變的是生涯結束的方式而非頻率，因此使種子變得充裕，只是以一種折損方式取代另一種，反而降低丘比的回收。丘比的累積回收量受制於新候選人出現的速度，這使其偏好的招募率取決於評估期間的長短。而爭奪種子的侵略性，呈現的是典型的公地悲劇：資源稀缺時對個體有利，對集體則是昂貴的。以上各項均非直接寫入規則，而是在本文標明的參數範圍內由模擬產生。

書目

- [1] H. S. Gordon, 「The Economic Theory of a Common-Property Resource: The Fishery」, *Journal of Political Economy*, 卷 62, 期 2, 頁 124–142, 1954, doi: 10.1086/257497.
- [2] M. B. Schaefer, 「Some Considerations of Population Dynamics and Economics in Relation to the Management of the Commercial Marine Fisheries」, *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, 卷 14, 期 5, 頁 669–681, 1957, doi: 10.1139/f57-025.
- [3] C. W. Clark, *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, 2nd 本. New York: Wiley, 1990.
- [4] G. Hardin, 「The Tragedy of the Commons」, *Science*, 卷 162, 期 3859, 頁 1243–1248, 1968, doi: 10.1126/science.162.3859.1243.
- [5] E. Ostrom, *Governing the Commons: The Evolution of Institutions for Collective Action*. Cambridge University Press, 1990. doi: 10.1017/CBO9780511807763.
- [6] J. Maynard Smith 及 G. R. Price, 「The Logic of Animal Conflict」, *Nature*, 卷 246, 期 5427, 頁 15–18, 1973, doi: 10.1038/246015a0.
- [7] J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 1982. doi: 10.1017/CBO9780511806292.
- [8] J. M. Epstein 及 R. Axtell, *Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up*. MIT Press, 1996. doi: 10.7551/mitpress/3374.001.0001.
- [9] J. S. Park, J. C. O'Brien, C. J. Cai, M. R. Morris, P. Liang, 及 M. S. Bernstein, 「Generative Agents: Interactive Simulacra of Human Behavior」, 收入 *Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology (UIST)*, 2023. doi: 10.1145/3586183.3606763.

- [10] J.-Y. Girard, 「Linear logic」, *Theoretical Computer Science*, 卷 50, 期 1, 頁 1–101, 1987, doi: 10.1016/0304-3975(87)90045-4.
- [11] J. McCarthy 及 P. J. Hayes, 「Some Philosophical Problems from the Standpoint of Artificial Intelligence」, 收入 *Machine Intelligence 4*, Edinburgh University Press, 1969, 頁 463–502.
- [12] C. Martens, 「Ceptre: A Language for Modeling Generative Interactive Systems」, 收入 *Proceedings of the Eleventh AAAI Conference on Artificial Intelligence and Interactive Digital Entertainment (AIIDE)*, 2015, 頁 51–57. doi: 10.1609/aiide.v11i1.12784.
- [13] A. M. Smith 及 M. Mateas, 「Answer Set Programming for Procedural Content Generation: A Design Space Approach」, *IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*, 卷 3, 期 3, 頁 187–200, 2011, doi: 10.1109/TCIAIG.2011.2158545.
- [14] M. J. Nelson 及 A. M. Smith, 「ASP with Applications to Mazes and Levels」, 收入 *Procedural Content Generation in Games*, 收入 *Computational Synthesis and Creative Systems*, Springer, 2016, 頁 143–157. doi: 10.1007/978-3-319-42716-4_8.
- [15] A. Summerville, C. Martens, B. Samuel, J. Osborn, N. Wardrip-Fruin, 及 M. Mateas, 「Gemini: Bidirectional Generation and Analysis of Games via ASP」, 收入 *Proceedings of the Fourteenth AAAI Conference on Artificial Intelligence and Interactive Digital Entertainment (AIIDE)*, 2018, 頁 123–129. doi: 10.1609/aiide.v14i1.13013.
- [16] J. D. C. Little, 「A Proof for the Queuing Formula: $L = \lambda W$ 」, *Operations Research*, 卷 9, 期 3, 頁 383–387, 1961, doi: 10.1287/opre.9.3.383.

附錄 A 重現與驗證

取用方式。模型、實驗主程式、所有圖表背後的資料，以及本文中英兩版，皆置於 <https://github.com/yuna0x0/madoka-magica-abm>，摘要頁面為 <https://madoka-magica-abm.pages.dev>。本研究為獨立進行，出於興趣而作，未經同儕審查；如發現錯誤，歡迎透過前述倉庫回報。

本模型以 Python 實作，唯一相依套件為 NumPy (`src/madoka_abm/world.py`，約 210 行程式碼)。實驗主程式 (`madoka-abm experiments`) 可於單核心上在三分鐘內重新產生所有圖表與結果檔。重複試驗使用確定性隨機種子 0, 1, 2, ...

恆等式檢驗。式 1 是一條恆等式，理應在每一段生涯上精確成立，因此可作為實作是否正確的檢驗。在橫跨 $\rho \in [0.02, 0.08]$ 、 $\kappa \in [1.5, 3.0]$ 與 $\sigma \in [0.007, 0.027]$ 的設定下，由式 2 預測的生涯長度與實際生涯長度，全部 5444 段記錄到的生涯中，相對誤差至多為 8×10^{-15} ，已達浮點精度。任何濁化階段的記帳錯誤，例如施加成本卻未記錄，或淨化未自種子容量中扣除，都會立即破壞此一恆等式。

穩態檢驗。在 $\sigma \leq 0.2$ 的範圍內，[4000, 6000] 日與 [6000, 8000] 日兩個視窗的人數落在重複試驗的雜訊之內：視窗之間的變化為 2% 至 12%，而重複試驗之間的離散度為 7% 至 19%，可知 8000 日的長度足以支撐本文報告的統計量。魔女充裕時暫態較長： $\sigma = 0.5$ 時人數在前 6000 日仍在上升，因此 [2500, 3000] 這類較早的視窗仍落在暫態之內，其值為 16.7，而後期視窗為 30.6。將這組設定延長至 24000 日後，各個 2000 日視窗的人數在 23.9 至 31.9 之間起伏，沒有趨勢，可知 8000 日足以掌握水準，但仍留有約 $\pm 15\%$ 的緩慢起伏；閱讀 $\sigma = 0.5$ 一欄時應一併考慮這個範圍。先前一次以 2500 日進行的模擬則過短，並產生系統性偏低的人數；此處特別記錄，因為這是以較短時程重現本研究時最可能遭遇的問題。